

RACHUNEK CAŁKOWY OPERATORÓW

ROZDZIAŁ I

Całka funkcji operatorowej i jej zastosowanie

§ 1. Funkcje operatorowe klasy (\mathcal{K})

Pojęcie całki w rachunku operatorów dałoby się najwygodniej wprowadzić przez odpowiednie uogólnienie całki Lebesgue'a. Można jednak unikać teorii całki Lebesgue'a, ograniczając się do pewnej specjalnej klasy funkcji operatorowych.

Wpierw zdefiniujemy pewną klasę funkcji $f(\lambda, t)$, którą oznaczmy przez $[\mathcal{K}]$.

O funkcji $f(\lambda, t)$ będziemy mówili, że jest klasy $[\mathcal{K}]$ w obszarze

$$D: \quad a \leq \lambda \leq \beta, \quad 0 \leq t < \infty,$$

jeżeli:

1. każdy obszar częściowy

$$D_0: \quad a \leq \lambda \leq \beta, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

może być przecięty co najwyżej skończoną liczbą prostych równoległych do osi λ i t , zawierających nieskończenie wiele punktów nieciągłości funkcji $f(\lambda, t)$;

2. w punktach ciągłości należących do obszaru D zachodzi nierówność

$$|f(\lambda, t)| \leq \varphi(\lambda)g(t)$$

przy odpowiednio dobranej funkcji g klasy \mathcal{K} i funkcji $\varphi(\lambda)$, mającej w przedziale $a \leq \lambda \leq \beta$ co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości i takiej, że całka $\int_a^\beta |\varphi(\lambda)| d\lambda$ (rozumiana w zwykłym sensie) ma wartość skończoną.

Na przykład funkcja $f(\lambda, t)$, która jest równa 1 w trójkątach zakreślonych na rysunku 132, a poza tym jest równa zeru w całym obszarze D , ma punkty nieciągłości wzdłuż obwodów trójkątów. Każda z prostych

$$(1.1) \quad \lambda = \lambda_0, \quad t = t_1, \quad t = t_2, \quad \dots$$

zawiera nieskończenie wiele punktów nieciągłości, każda zaś inna prosta równoległa do osi λ lub t zawiera co najwyżej dwa punkty nieciągłości. Każda część ograniczona obszaru D jest przecięta przez skończoną liczbę prostych (1.1), zatem własność 1 jest spełniona.

Ponadto widać, że własność 2 jest również spełniona. Zatem rozważana funkcja należy do klasy $[\mathcal{K}]$.

W szczególności każda funkcja $f(\lambda, t)$, która jest ciągła w obszarze D , jest funkcją klasy $[\mathcal{K}]$. Również każda funkcja kształtu $\varphi(\lambda)g(t)$, gdzie φ i g mają własności 2, jest funkcją klasy $[\mathcal{K}]$.

O funkcji operatorowej $f(\lambda)$ będziemy mówili, że jest funkcją klasy (\mathcal{K}) w przedziale $a \leq \lambda \leq \beta$, jeżeli da się przedstawić w postaci

$$(1.2) \quad f(\lambda) = g\{f_1(\lambda, t)\},$$

gdzie g jest operatorem, zaś funkcja $f_1(\lambda, t)$ jest funkcją klasy $[\mathcal{K}]$ w obszarze D .

W szczególności każda funkcja operatorowa ciągła jest funkcją klasy (\mathcal{K}) .

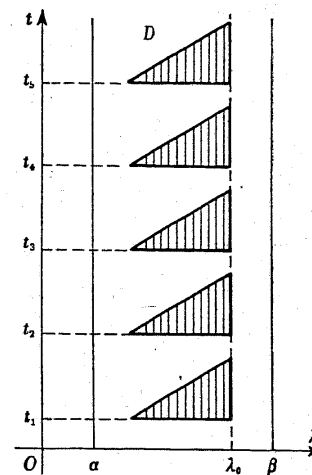
§ 2. Definicja całki

Przez całkę z funkcji $f(\lambda)$ klasy (\mathcal{K}) w przedziale $a \leq \lambda \leq \beta$ będziemy rozumieli operator

$$(2.1) \quad \int_a^\beta f(\lambda) d\lambda = g\left\{\int_a^\beta f_1(\lambda, t) d\lambda\right\}$$

przy oznaczeniu (1.2).

Definicję (2.1) przyjmujemy również, gdy $\beta \leq a$.



Rys. 132.

Każdą funkcję operatorową klasy (\mathcal{K}) można przedstawić w postaci (1.2) na nieskończenie wiele sposobów. Gdy bowiem $a \in \mathcal{C}$ i $a \neq 0$, to możemy zawsze napisać

$$f(\lambda) = \frac{q}{a} \{f_2(\lambda, t)\},$$

gdzie funkcja $f_2(\lambda, t) = \int_0^t a(t-\tau) f_1(\lambda, \tau) d\tau$ jest podobnie jak $f_1(\lambda, t)$ funkcją klasy $[\mathcal{K}]$.

Aby definicja całki była jednoznaczna, równość

$$(2.2) \quad q_1 \{f_1(\lambda, t)\} = q_2 \{f_2(\lambda, t)\}$$

musi za sobą pociągać równość

$$(2.3) \quad q_1 \left\{ \int_a^b f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = q_2 \left\{ \int_a^b f_2(\lambda, t) d\lambda \right\}.$$

Jest tak w istocie, gdyż pisząc

$$(2.4) \quad q_1 = \frac{a_1}{c} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{a_2}{c},$$

gdzie a_1, a_2 i $c \neq 0$ są elementami klasy \mathcal{C} , mamy wobec (2.2)

$$(2.5) \quad \int_0^t a_1(t-\tau) f_1(\lambda, \tau) d\tau = \int_0^t a_2(t-\tau) f_2(\lambda, \tau) d\tau$$

w obszarze D . Całkując (2.5) względem λ i przestawiając kolejność znaków całki, dochodzimy do równości

$$\int_0^t a_1(t-\tau) \left[\int_a^b f_1(\lambda, \tau) d\lambda \right] d\tau = \int_0^t a_2(t-\tau) \left[\int_a^b f_2(\lambda, \tau) d\lambda \right] d\tau,$$

a stąd

$$a_1 \left\{ \int_a^b f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = a_2 \left\{ \int_a^b f_2(\lambda, t) d\lambda \right\}.$$

Po podzieleniu przez c otrzymujemy równość (2.3).

Stwierdziliśmy w ten sposób jednoznaczność definicji całki.

Jeżeli funkcja $f(\lambda)$ jest liczbowa, to powyższa definicja pokrywa się ze zwykłą definicją całki. W istocie, można wtedy napisać $f(\lambda) = s\{f(\lambda)\}$ i

$$\int_a^b f(\lambda) d\lambda = s \left\{ \int_a^b f(\lambda) d\lambda \right\},$$

gdzie całka z lewej strony jest rozumiana w sensie operatorowym, z prawej zaś strony w sensie zwykłym.

§ 3. Własności całki

Całka z funkcji operatorowej ma podobne własności jak zwykła całka.

Własność I. $\int_a^a f(\lambda) d\lambda = 0.$

Istotnie jest

$$\int_a^a f(\lambda) d\lambda = q \left\{ \int_a^a f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = q\{0\} = 0.$$

Własność II. $\int_a^b f(\lambda) d\lambda = - \int_b^a f(\lambda) d\lambda.$

Istotnie jest

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\lambda) d\lambda &= q \left\{ \int_a^b f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = q \left\{ - \int_b^a f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = \\ &= -q \left\{ \int_b^a f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = - \int_b^a f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Własność III. $\int_a^b f(\lambda) d\lambda = \int_a^{\gamma} f(\lambda) d\lambda + \int_{\gamma}^b f(\lambda) d\lambda.$

Istotnie, jest

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\lambda) d\lambda &= q \left\{ \int_a^b f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = q \left\{ \int_a^{\gamma} f_1(\lambda, t) d\lambda + \int_{\gamma}^b f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = \\ &= \int_a^{\gamma} f(\lambda) d\lambda + \int_{\gamma}^b f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Własność IV. $\int_{\alpha}^{\beta} cf(\lambda) d\lambda = c \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\lambda$ (dla każdego operatora c).

Istotnie, przedstawiając $f(\lambda)$ w postaci (1.2) mamy $cf(\lambda) = c q\{f_1(\lambda, t)\}$ i wobec tego w myśl definicji całki

$$\int_{\alpha}^{\beta} cf(\lambda) d\lambda = c q\left\{\int_{\alpha}^{\beta} f_1(\lambda, t) d\lambda\right\} = c \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\lambda.$$

Własność V. $\int_{\alpha}^{\beta} [f(\lambda) \pm g(\lambda)] d\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\lambda \pm \int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda) d\lambda$.

Istotnie, możemy napisać

$$(3.1) \quad f(\lambda) = q_1\{f_1(\lambda, t)\}, \quad g(\lambda) = q_2\{g_1(\lambda, t)\},$$

gdzie zarówno funkcja $f_1(\lambda, t)$ jak i funkcja $g_1(\lambda, t)$ są klasy $[\mathcal{K}]$. Przyjmując (2.4) będziemy mieli

$$f(\lambda) = \frac{1}{c}\{f_2(\lambda, t)\} \quad \text{i} \quad g(\lambda) = \frac{1}{c}\{g_2(\lambda, t)\},$$

gdzie $\{f_2(\lambda, t)\} = a_1\{f_1(\lambda, t)\}$ i $\{g_2(\lambda, t)\} = a_2\{g_1(\lambda, t)\}$. Zatem

$$f(\lambda) \pm g(\lambda) = \frac{1}{c}\{f_2(\lambda, t) \pm g_2(\lambda, t)\},$$

a stąd

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\lambda) \pm g(\lambda)] d\lambda &= \frac{1}{c} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} [f_2(\lambda, t) \pm g_2(\lambda, t)] d\lambda \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f_2(\lambda, t) d\lambda \right\} \pm \frac{1}{c} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} g_2(\lambda, t) d\lambda \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) d\lambda \pm \int_{\alpha}^{\beta} g(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Własność VI. Jeżeli funkcje operatorowe $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ mają pochodne ciągłe w przedziale $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, to

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(\lambda) g(\lambda) d\lambda = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)g'(\lambda) d\lambda.$$

Istotnie, pisząc (3.1), mamy

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f'(\lambda) g(\lambda) d\lambda &= q_1 q_2 \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t - \tau) g_1(\lambda, \tau) d\tau \right] d\lambda \right\} = \\ &= q_1 q_2 \left\{ \int_0^t \left[\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t - \tau) g_1(\lambda, \tau) d\lambda \right] d\tau \right\} = \\ &= q_1 q_2 \left\{ \int_0^t \left[f_1(\beta, t - \tau) g_1(\beta, \tau) - f_1(\alpha, t - \tau) g_1(\alpha, \tau) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda, t - \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} g_1(\lambda, \tau) d\lambda \right] d\tau \right\} = \\ &= f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)g'(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Własność VII. Jeżeli $\varphi(\lambda)$ jest funkcją liczbową, mającą pochodną ciągłą $\varphi'(\lambda)$, a $f(\lambda)$ dowolną funkcją operatorową ciągłą, to

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(\lambda)] \varphi'(\lambda) d\lambda = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\lambda) d\lambda.$$

Istotnie, jest

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(\lambda)] \varphi'(\lambda) d\lambda &= q \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} f_1[\varphi(\lambda), t] \varphi'(\lambda) d\lambda \right\} = \\ &= q \left\{ \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f_1(\lambda, t) d\lambda \right\} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Własność VIII. Jeżeli funkcja operatorowa $f(\lambda)$ jest ciągłą, to funkcja

$$F(\lambda) = \int_{\alpha}^{\lambda} f(x) dx$$

ma pochodną $F'(\lambda) = f(\lambda)$.

Istotnie,

$$F'(\lambda) = q \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\alpha}^{\lambda} f_1(x, t) dx \right\} = q\{f_1(\lambda, t)\} = f(\lambda).$$

§ 4. Funkcje operatorowe dwóch zmiennych

Jeżeli każdemu punktowi (λ, κ) pewnego obszaru jest przyporządkowany pewien operator, to mówimy, że w tym obszarze jest określona funkcja operatorowa dwóch zmiennych $f(\lambda, \kappa)$.

Funkcja $f(\lambda, \kappa)$ jest *ciągła* w prostokącie

$$(4.1) \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \quad \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2,$$

jeżeli istnieje operator q i funkcja trzech zmiennych $f_1(\lambda, \kappa, t)$ (o wartościach liczbowych) ciągła w obszarze

$$(4.2) \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \quad \kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2, \quad 0 \leq t < \infty,$$

taka że

$$(4.3) \quad f(\lambda, \kappa) = q\{f_1(\lambda, \kappa, t)\}.$$

Gdy κ ustalimy dowolnie w przedziale $\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$, to $f(\lambda, \kappa)$ możemy traktować jako funkcję jednej zmiennej λ

$$g(\lambda) = f(\lambda, \kappa).$$

Funkcja $g(\lambda)$ jest ciągła w przedziale $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, gdy $f(\lambda, \kappa)$ jest ciągła w (4.1).

Podobnie, gdy ustalimy λ dowolnie w przedziale $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, to $f(\lambda, \kappa)$ możemy uważać za funkcję jednej zmiennej κ

$$h(\kappa) = f(\lambda, \kappa).$$

Funkcja $h(\kappa)$ jest ciągła w przedziale $\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$, gdy $f(\lambda, \kappa)$ jest ciągła w (4.1).

Definicję ciągłości funkcji operatorowej dwóch zmiennych można rozszerzyć na dowolny obszar, mówiąc, że jest w nim ciągła, gdy jest ciągła w każdym prostokącie (4.1) w nim zawartym.

Przez pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \kappa)$ rozumiemy pochodną względem λ ($f(\lambda, \kappa)$) przy dowolnie ustalonym κ . Ograniczymy się do przypadku, kiedy pochodna ta jest ciągła. Istnieje wówczas operator q i funkcja $f_1(\lambda, \kappa, t)$ (o wartościach liczbowych), mająca pochodną cząstkową (w zwykłym sensie)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, \kappa, t)$$

ciągłą w (4.2) i taką że

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \kappa) = q\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, \kappa, t)\right\}.$$

Udowodnimy jeszcze następującą własność całki:

Własność IX. Jeżeli funkcja operatorowa dwóch zmiennych $f(\lambda, \kappa)$ jest ciągła w kwadracie

$$a \leq \lambda \leq \beta, \quad a \leq \kappa \leq \beta$$

i ma pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \kappa)$ ciągłą w tym kwadracie, to przy dowolnie ustalonym λ_0 ($a \leq \lambda_0 \leq \beta$) mamy wzór

$$\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(\lambda, \kappa) d\kappa\right)' = f(\lambda, \lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \kappa) d\kappa \quad (a \leq \lambda \leq \beta).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(\lambda, \kappa) d\kappa\right)' &= q\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda} f_1(\lambda, \kappa, t) d\kappa\right\} = \\ &= q\left\{f_1(\lambda, \lambda, t) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, \kappa, t) d\kappa\right\} = f(\lambda, \lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, \kappa) d\kappa. \end{aligned}$$

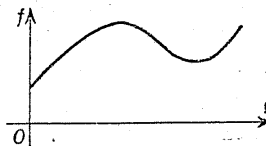
Własność IX można uogólnić na przypadek, kiedy granice całkowania są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami liczbowymi.

§ 5. Obcinanie funkcji

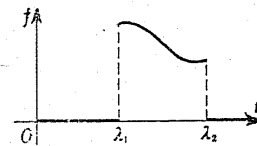
Udowodnimy, że jeżeli $f(\lambda)$ przyjmuje wartości liczbowe w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$, to

$$(5.1) \quad \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \begin{cases} f(t) & \text{w przedziale } \lambda_1 < t < \lambda_2 \\ 0 & \text{poza tym przedziałem} \end{cases} \quad (0 \leq \lambda_1 < \lambda_2).$$

Znaczenie tego wzoru ilustrują wykresy, przedstawione na rysunkach 133 i 134.



Rys. 133.



Rys. 134.

Wzór (5.1) pozwala więc niejako *obcinać* funkcję f poza dowolnym przedziałem (λ_1, λ_2) .

Aby wzór ten udowodnić, przyjmujemy najpierw, że $\lambda_1 = 0$. Ponieważ $e^{-\lambda s} = s\{h(\lambda, t)\}$, gdzie

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq \lambda < t, \end{cases}$$

więc

$$\int_0^{\lambda} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = s \left\{ \int_0^{\lambda} h(\lambda, t) f(\lambda) d\lambda \right\} = s \left\{ \int_0^t 1 \cdot g(\lambda_2, \lambda) d\lambda \right\} = \{g(\lambda_2, t)\},$$

gdzie

$$g(\lambda, t) = \begin{cases} f(t) & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ 0 & \text{dla } 0 \leq \lambda < t. \end{cases}$$

Przypadek $\lambda_1 > 0$ sprowadza się do poprzedniego przez rozbitcie całki we wzorze (5.1) na dwie całki

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \int_0^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda.$$

Jeżeli funkcja $f(t)$ jest periodyczna o okresie $2\lambda_0$, to mamy wzór

$$\{f(t)\} = \frac{\int_0^{2\lambda_0} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda}{1 - e^{-2\lambda_0 s}}.$$

Istotnie, całka w liczniku przedstawia funkcję obciętą w punkcie $t = 2\lambda_0$, a więc jeden period funkcji; natomiast mianownik powoduje powtórzenie tego periodu obok siebie nieskończenie wiele razy w odstępach $2\lambda_0$.

Mamy więc na przykład

$$\{\sin t\} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} \sin \lambda d\lambda}{1 - e^{-2\pi s}};$$

całkując dwukrotnie przez części, dochodzimy do znanego wzoru $\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ (nie jest to oczywiście najprostszy sposób wyprowadzenia tego wzoru).

Inną funkcję przedstawia wyrażenie

$$\{f(t)\} = \frac{\int_0^{\pi} e^{-\lambda s} \sin \lambda d\lambda}{1 - e^{-2\pi s}};$$

wykres tej funkcji wyobraża sinusoidę obciętą w punkcie $t = \pi$ i powtórzoną następnie nieskończenie wiele razy w odstępach 2π . Wykres taki podaliśmy na rysunku 96 (str. 144).

Obliczając całkę w liczniku według prawideł całkowania, znajdujemy

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda s} \sin \lambda d\lambda = \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2};$$

jest zatem

$$\{f(t)\} = \frac{1}{1 + s^2} \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{1}{(1 + s^2)(1 - e^{-\pi s})}$$

zgodnie z wzorem znalezionym w części II (str. 144).

Funkcja

$$\{g(t)\} = \frac{\int_0^{\beta/2} e^{-\lambda s} d\lambda}{1 - e^{-\beta s}}$$

ma wartość 1 w przedziale $0 < t < \beta/2$ oraz w każdym przedziale przesuniętym o $n\beta$, to znaczy w przedziałach $n\beta < t < (n+1)\beta/2$ ($n=0, 1, \dots$). Ale mamy

$$\int_0^{\beta/2} e^{-\lambda s} d\lambda = \frac{1 - e^{-\beta s/2}}{s},$$

więc

$$\{g(t)\} = \frac{1 - e^{-\beta s/2}}{s(1 - e^{-\beta s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-\beta s/2})},$$

zgodnie z wzorem z paragrafu 15 części II (str. 145).

§ 6. Postać całkowa pewnego rozwiązania szczególnego równania różniczkowego logarytmicznego

Założmy, że równanie operatorowe

$$(6.1) \quad a_m x^{(m)} + \dots + a_0 x = 0$$

jest logarytmiczne, to znaczy, że wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego (w liczbie m) są logarytmami. Wówczas rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(\lambda) = c_1 x_1(\lambda) + \dots + c_m x_m(\lambda),$$

gdzie c_1, \dots, c_m są dowolnymi operatorami, a funkcje $x_1(\lambda), \dots, x_m(\lambda)$ mają postać $\lambda^\nu e^{\lambda \mu}$. Dobierzmy stałe c_1, \dots, c_m w ten sposób, żeby

$$(6.2) \quad x^{(\nu)}(0) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq \nu \leq m-2, \quad x^{(m-1)}(0) = 1.$$

W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} c_1 x_1(0) + \dots + c_m x_m(0) &= 0, \\ \dots & \\ c_1 x_1^{(m-2)}(0) + \dots + c_m x_m^{(m-2)}(0) &= 0, \\ c_1 x_1^{(m-1)}(0) + \dots + c_m x_m^{(m-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Wprowadzając wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} x_1(0) & \dots & x_m(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(m-2)}(0) & \dots & x_m^{(m-2)}(0) \\ x_1^{(m-1)}(0) & \dots & x_m^{(m-1)}(0) \end{vmatrix}$$

i oznaczając przez D_1, \dots, D_m jego minory odpowiadające elementom ostatniego wiersza, możemy napisać

$$c_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \dots, \quad c_m = \frac{D_m}{D};$$

jak wiadomo z paragrafu 8 części III wyznacznik D jest zawsze różny od zera.

Wobec tego szukane rozwiązanie ma postać

$$x(\lambda) = \frac{D_1 x_1(\lambda) + \dots + D_m x_m(\lambda)}{D};$$

łatwo zauważyć, że licznik jest rozwinięciem wyznacznika

$$E(\lambda) = \begin{vmatrix} x_1(0) & \dots & x_m(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(m-2)}(0) & \dots & x_m^{(m-2)}(0) \\ x_1(\lambda) & \dots & x_m(\lambda) \end{vmatrix},$$

który powstaje z wyznacznika D przez zastąpienie ostatniego wiersza przez $x_1(\lambda), \dots, x_m(\lambda)$.

Rozwiązanie $x(\lambda)$ można więc zapisać jako iloraz dwóch wyznaczników

$$x(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{D}.$$

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie

$$(6.3) \quad x_0(\lambda) = \int_0^\lambda f(\kappa) x(\lambda - \kappa) d\kappa,$$

gdzie $f(\kappa)$ jest dowolną funkcją operatorową ciągłą. Korzystając z własności IX całki, udowodnionej w paragrafie 4, oraz z równości (6.2), łatwo wyliczyć, że

$$\begin{aligned} x'_0(\lambda) &= \int_0^\lambda f(\kappa) x'(\lambda - \kappa) d\kappa, \\ \dots & \\ x_0^{(m-1)}(\lambda) &= \int_0^\lambda f(\kappa) x^{(m-1)}(\lambda - \kappa) d\kappa, \\ x_0^{(m)}(\lambda) &= \int_0^\lambda f(\kappa) x^{(m)}(\lambda - \kappa) d\kappa + f(\lambda). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} a_m x_0^{(m)}(\lambda) + \dots + a_0 x_0(\lambda) &= \\ = \int_0^\lambda f(\kappa) [a_m x^{(m)}(\lambda - \kappa) + \dots + a_0 x(\lambda - \kappa)] d\kappa + a_m f(\lambda). \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $x(\lambda)$ spełnia równanie (6.1), wyrażenie w nawiasie graniastym jest równe identycznie zeru i widać, że $x_0(\lambda)$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego

$$a_m x^{(m)} + \dots + a_0 x = a_m f(\lambda);$$

wprowadzając wyznaczniki D i $E(\lambda)$, rozwiązanie to możemy zapisać w postaci

$$(6.4) \quad x_0(\lambda) = \int_0^\lambda f(\kappa) \frac{E(\lambda - \kappa)}{D} d\kappa.$$

Widzimy więc, że w przypadku równania logarytmicznego istnieje zawsze rozwiązanie, o ile tylko prawa strona $f(\lambda)$ jest funkcją ciągłą.

Warto zauważyć, co wynika z wzorów (6.3) i (6.4), że rozwiązanie $x_0(\lambda)$ spełnia warunki początkowe

$$x_0^{(v)}(0) = 0 \quad (v = 0, \dots, m-1).$$

§ 7. Zastosowanie do równania struny drgającej

W przypadku równania

$$(7.1) \quad x'' - a^2 s^2 x = 0$$

mamy rozwiązanie ogólne

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda s} + c_2 e^{a\lambda s}.$$

Wyznaczniki D i E mają wtedy postać

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -as & as \end{vmatrix} = 2as, \quad E(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-a\lambda s} & e^{a\lambda s} \end{vmatrix} = e^{a\lambda s} - e^{-a\lambda s}.$$

Stąd znajdujemy od razu funkcję

$$x(\lambda) = \frac{e^{a\lambda s} - e^{-a\lambda s}}{2as} = \frac{1}{as} \operatorname{sh} a\lambda s,$$

która spełnia równanie (7.1) i warunki

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Dla równania niejednorodnego

$$(7.2) \quad x'' - a^2 s^2 x = f(\lambda)$$

mamy więc rozwiązanie szczególne

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{as} \int_0^\lambda f(\kappa) \operatorname{sh}[a(\lambda - \kappa)s] d\kappa.$$

Rozwiązanie ogólne równania (7.2) można napisać w postaci

$$(7.3) \quad x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda s} + c_2 e^{a\lambda s} + \frac{1}{as} \int_0^\lambda f(\kappa) \operatorname{sh}[a(\lambda - \kappa)s] d\kappa.$$

W paragrafie 25 części II rozważaliśmy przypadek, gdy

$$(7.4) \quad f(\lambda) = -a^2 s \varphi(\lambda) \quad (a > 0),$$

$$(7.5) \quad x(0) = 0 \quad \text{i} \quad x(\lambda_0) = 0,$$

gdzie $\varphi(\lambda)$ jest dowolną ciągłą funkcją liczbową. Dla dostosowania we wzorze (7.3) stałych c_1 i c_2 do warunków (7.5) musimy rozwiązać układ równań

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 e^{-a\lambda_0 s} + c_2 e^{a\lambda_0 s} - a \int_0^{\lambda_0} \varphi(\kappa) \operatorname{sh}[a(\lambda_0 - \kappa)s] d\kappa = 0.$$

Po wyliczeniu wartości c_1 i c_2 i podstawieniu ich do (7.3) znajdujemy, uwzględniając równość (7.4),

$$(7.6) \quad x_0(\lambda) = \frac{a \operatorname{sh} a\lambda s}{\operatorname{sh} a\lambda_0 s} \int_0^{\lambda_0} \varphi(\kappa) \operatorname{sh}[a(\lambda_0 - \kappa)s] d\kappa - a \int_0^\lambda \varphi(\kappa) \operatorname{sh}[a(\lambda - \kappa)s] d\kappa.$$

Ale poprzednio znaleźliśmy rozwiązanie tego samego zagadnienia w postaci

$$\frac{1}{2} \left\{ \varphi \left(\lambda + \frac{t}{a} \right) + \varphi \left(\lambda - \frac{t}{a} \right) \right\},$$

gdzie przyjęto $-\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda + 2\lambda_0)$. Ponieważ znalezione rozwiązanie jest jedyne, więc musi być

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi \left(\lambda + \frac{t}{a} \right) + \varphi \left(\lambda - \frac{t}{a} \right) \right\};$$

do równości tej można dojść wprost z wzoru (7.6), ale rachunek jest dość żmudny.

Podamy inne zastosowanie wzoru (7.3).

Rozwiążmy równanie cząstkowe

$$(7.7) \quad x_{\lambda\lambda} - x_{tt} = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \quad 0 \leq t < \infty)$$

przy warunkach początkowych

$$(7.8) \quad x(\lambda, 0) = h_0(\lambda), \quad x_t(\lambda, 0) = h_1(\lambda),$$

$$(7.9) \quad x(0, t) = v_0(t), \quad x_\lambda(0, t) = v_1(t).$$

Zagadnieniu temu odpowiada równanie operatorowe

$$(7.10) \quad x'' - s^2 x = -s h_0(\lambda) - h_1(\lambda)$$

z warunkami

$$(7.11) \quad x(0) = v_0, \quad x'(0) = v_1.$$

Rozwiązanie ogólne ma kształt

$$(7.12) \quad x(\lambda) = c_1 e^{-\lambda s} + c_2 e^{\lambda s} - \int_0^\lambda [h_0(\kappa) + l h_1(\kappa)] \operatorname{sh}[(\lambda - \kappa)s] ds.$$

Wobec warunków (7.11) musi być

$$c_1 + c_2 = v_0, \quad -s c_1 + s c_2 = v_1;$$

stąd znajdujemy

$$c_1 = \frac{v_0}{2} - \frac{v_1}{2s} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{v_0}{2} + \frac{v_1}{2s}.$$

Podstawiając te wartości do (7.12), mamy po prostym przekształceniu

$$x(\lambda) = \frac{1}{2}(v_0 - l v_1) e^{-\lambda s} + \frac{1}{2} \int_0^\lambda e^{-(\lambda - \kappa)s} [h_0(\kappa) + l h_1(\kappa)] d\kappa + \frac{1}{2} e^{\lambda s} y(\lambda),$$

gdzie

$$y(\lambda) = v_0 + l v_1 - \int_0^\lambda e^{-\kappa s} [h_0(\kappa) + l h_1(\kappa)] d\kappa.$$

Funkcja $x(\lambda)$ będzie parametryczna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $y(\lambda) = \{y(\lambda, t)\}$ będzie parametryczna i gdy ponadto będzie

$$(7.13) \quad y(\lambda, t) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq \lambda.$$

Ale mamy

$$\int_0^\lambda e^{-\kappa s} [h_0(\kappa) + l h_1(\kappa)] d\kappa = \begin{cases} h_0(t) + \int_0^t h_1(\tau) d\tau & \text{dla} \quad 0 \leq t < \lambda, \\ 0 & \text{dla} \quad 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$

i wobec tego

$$y(\lambda, t) = v_0(t) + \int_0^t v_1(\tau) d\tau - h_0(t) - \int_0^t h_1(\tau) d\tau \quad \text{dla} \quad 0 \leq t < \lambda.$$

Ponieważ λ zmienia się w przedziale $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, więc z warunku (7.13) dostajemy

$$(7.14) \quad v_0(t) + \int_0^t v_1(\tau) d\tau = h_0(t) + \int_0^t h_1(\tau) d\tau \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq \lambda_0.$$

Jest to warunek konieczny i wystarczający, żeby rozwiązanie (7.12) spełniające równości (7.11) było funkcją parametryczną.

Stąd wynika, że dla równania cząstkowego (7.7) warunki (7.8) i (7.9) nie mogą być dane zupełnie dowolnie, lecz muszą spełniać zależność (7.14). Wobec tego wystarczy podać na przykład warunki (7.8) i którykolwiek z warunków (7.9), a drugi można wyznaczyć ze związku (7.14).

Przykład. Znaleźć funkcję $x(\lambda, t)$ spełniającą równanie

$$(7.15) \quad x_{\lambda\lambda} - x_{tt} = 0 \quad (0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq t < \infty)$$

i warunki

$$(7.16) \quad x(\lambda, 0) = \lambda^2, \quad x(0, t) = t^3, \quad x_\lambda(0, t) = 0.$$

Ze związku (7.14) wyliczamy łatwo

$$x_t(\lambda, 0) = 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Wobec tego równanie operatorowe ma postać

$$x'' - s^2 x = -s\lambda^2 - 3\lambda^2 + 2\lambda.$$

Rozwiązania szczególnego nie opłaca się jednak wyznaczać z ogólnego wzoru całkowego (7.6), lepiej znaleźć rozwiązanie wielomienne. Ma ono postać

$$x_0(\lambda) = 3l^2 \lambda^2 + l \lambda^2 - 2l^3 \lambda + 2l^3 + 6l^4.$$

Stąd rozwiązanie ogólne

$$x(\lambda) = c_1 e^{-\lambda s} + c_2 e^{\lambda s} + x_0(\lambda).$$

Aby to rozwiązanie było funkcją parametryczną, musimy przyjąć $c_2=0$. Stałą c_1 wyznaczamy z warunku początkowego $x(0)=6l^4$

$$c_1 + 2l^3 + 6l^4 = 6l^4.$$

Stąd znajdujemy

$$c_1 = -2l^3.$$

Wobec tego jest

$$x(\lambda) = -2l^3 e^{-\lambda s} + 3l^2 \lambda^2 + l\lambda^2 - 2l^2 \lambda + 2l^3 + 6l^4,$$

a po uwzględnieniu znaczenia operatora przesunięcia

$$x(\lambda, t) = \begin{cases} 3\lambda^2 t + \lambda^2 - 2\lambda t + t^2 + t^3 & \text{dla } 0 \leq t \leq \lambda, \\ 3\lambda^2 t + t^3 & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq t. \end{cases}$$

Jest to jedyna funkcja spełniająca w obszarze $0 \leq \lambda < \infty$, $0 \leq t < \infty$ równanie (7.15) a ponadto warunki (7.16).

Uwaga. Warunek (7.14) wystarcza, by rozwiązanie równania operatorowego (7.10) było funkcją parametryczną, nie zapewnia jednak, że ta funkcja będzie różniczkowalna w zwykłym sensie. W przypadku rozwiązywania równania cząstkowego (7.7) należy więc na końcu sprawdzić różniczkowalność znalezionej funkcji. O ile jest ona nieróżniczkowalna, to przy danych warunkach początkowych rozwiązanie równania cząstkowego nie istnieje w ogóle i zagadnienie może mieć sens matematyczny tylko wtedy, gdy je traktujemy z punktu widzenia operatorów.

§ 8. Zastosowanie szeregów nieskończonych i całek oznaczonych

Wzór (6.4) może być stosowany tylko wtedy, gdy dane równanie jest logarytmiczne. W innych przypadkach mogą być nieraz z powodzeniem stosowane rozwinięcia na szeregi nieskończone lub metoda całek oznaczonych.

Przykłady rozwinięć na szeregi trygonometryczne mieliśmy już w części II (§§ 40-46). Tu podamy inne przykłady.

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$(8.1) \quad x_{\lambda\lambda} + x_{\lambda s} = 0 \quad (-1 < \lambda < 1, 0 \leq t < \infty)$$

przy warunkach

$$(8.2) \quad x(\lambda, 0) = 0, \quad x_t(\lambda, 0) = 0, \quad x_{tt}(\lambda, 0) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Równanie operatorowe ma postać

$$(8.3) \quad x'' + s^3 x = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Funkcja $\frac{1}{1-\lambda}$ rozwija się na szereg potęgowy

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$$

Szukając rozwiązania wielomianowego $x_n(\lambda)$ równania

$$x'' + s^3 x = \lambda^n,$$

znajdujemy

$$x_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{n!}{n!} l^3 \lambda^n - \frac{n!}{(n-2)!} l^3 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n/2} \frac{n!}{0!} l^{\frac{3}{2}(n+2)}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste;} \\ \frac{n!}{n!} l^3 \lambda^n - \frac{n!}{(n-2)!} l^3 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{1!} l^{\frac{3}{2}(n+1)}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Formalnym rozwiązaniem równania (8.3) będzie wyrażenie

$$(8.4) \quad x(\lambda) = x_0(\lambda) + x_1(\lambda) + \dots = c_0 + c_1 \lambda + \dots,$$

gdzie

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(n+2\nu)!}{n!} l^{3(\nu+1)} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(n+2\nu)!}{n!(3\nu+2)!} l^{3\nu+2} \right\}.$$

Jest widoczne, że szeregi wewnątrz klamry $\{ \}$ są zbieżne jednostajnie w każdym przedziale $[0, t_0]$; stąd wynika, że współczynniki c_n mają sens. Można udowodnić, że szereg $c_0 + c_1 \lambda + \dots$ jest zbieżny (operatorowo) dla $|\lambda| < 1$. Stąd wynika, że przedstawia on rzeczywiście (nie tylko formalnie) funkcję operatorową, spełniającą równanie (8.3). Wobec tego rozwiązanie równania cząstkowego (8.1) ma postać

$$x(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (n+2\nu)! \frac{l^{3\nu+2}}{(3\nu+2)!} \quad (-1 < \lambda < 1).$$

Łatwo udowodnić, że jest to jedyne rozwiązanie równania (8.1), spełniające warunki (8.2). Wynika to stąd, że równanie charakterystyczne

$$u^2 + s^3 = 0$$

ma pierwiastki $-is^{3/2}$ i $is^{3/2}$, z których żaden nie jest logarytmem.

Uwaga. Stałych c_0, c_1, c_2, \dots we wzorze (8.4) nie można wyznaczać bezpośrednio przez podstawienie szeregu $c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots$ do równania

$$x'' + s^2x = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$$

i przez porównanie współczynników przy potęgach λ . Wtedy znaleźlibyśmy co prawda pewien wzór rekurencyjny, ale mielibyśmy trudności z wyznaczeniem dwóch początkowych współczynników c_0 i c_1 , które nie mogą być ustalone w sposób dowolny.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$(8.5) \quad x_{\lambda\lambda} + 2x_{\lambda s^2} + x_{ss} = 0 \quad (-1 < \lambda < \infty, 0 \leq t < \infty)$$

przy warunkach początkowych

$$(8.6) \quad x(\lambda, 0) = 0, \quad x_t(\lambda, 0) = 0, \quad x_{ss}(\lambda, 0) = 0, \quad x_{\lambda\lambda}(\lambda, 0) = \frac{1}{1+\lambda} e^{-1-\lambda}.$$

Równanie operatorowe ma postać

$$(8.7) \quad x^{(4)} + 2s^2x'' + s^4x = \frac{1}{1+\lambda} e^{-1-\lambda}.$$

Prawa strona tego równania da się przedstawić w postaci całki

$$\int_1^\infty e^{-(1+\lambda)\alpha} d\alpha.$$

Możemy napisać od razu rozwiązanie równania

$$x^{(4)} + 2s^2x'' + s^4x = e^{-(1+\lambda)\alpha};$$

jest nim funkcja

$$x_\alpha(\lambda) = \frac{e^{-(1+\lambda)\alpha}}{(\alpha^2 + s^2)^2} = \left\{ \frac{1}{2\alpha^3} e^{-(1+\lambda)\alpha} (\sin \alpha t - \alpha t \cos \alpha t) \right\}.$$

Całkując tę funkcję względem parametru α w granicach od 1 do ∞ , dostaniemy formalne rozwiązanie równania (8.5)

$$(8.8) \quad x(\lambda) = \int_1^\infty \frac{e^{-(1+\lambda)\alpha}}{(\alpha^2 + s^2)^2} d\alpha,$$

a stąd

$$x(\lambda, t) = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{\alpha^3} e^{-(1+\lambda)\alpha} (\sin \alpha t - \alpha t \cos \alpha t) d\alpha.$$

Nietrudno jest zauważyć jednostajną zbieżność tej całki i jej pochodnych względem λ ; zatem znalezione wyrażenie nie tylko formalnie, ale faktycznie spełnia dane równanie. Jest to jedyne rozwiązanie tego równania, spełniające warunki (8.6), gdyż równanie charakterystyczne

$$u^4 + 2u^2s^2 + s^4 = 0$$

ma pierwiastki (podwójne) $-is, is$, które nie są logarytmami.

rozważana całka jest zbieżna, można przyporządkować pewną funkcję analityczną

$$(9.2) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Takie przyporządkowanie nazywamy *transformacją Laplace'a*.

ROZDZIAŁ II

Transformacje całkowe

§ 9. Transformacja Laplace'a

W ostatnim przykładzie poprzedniego paragrafu miałem do czynienia z całką niewłaściwą (8.8). Należy ją rozumieć jako granicę

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{e^{-(1+\lambda)\alpha}}{(\alpha^2 + s^2)^2} d\alpha.$$

Podobnie należy rozumieć inne całki niewłaściwe. Weźmy w szczególności całkę

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda,$$

gdzie f jest dowolną funkcją klasy \mathcal{K} .

Ale wobec paragrafu 5 mamy

$$\int_0^{\beta} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \begin{cases} f(t) & \text{dla } 0 \leq t < \beta, \\ 0 & \text{dla } \beta < t < \infty \end{cases}$$

i w granicy

$$(9.1) \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} f(\lambda) d\lambda = \{f(t)\}.$$

Granica ta oczywiście zawsze istnieje, jakkolwiek weźmiemy funkcję f klasy \mathcal{K} .

Pomyślmy sobie na chwilę, że litera s w całce (9.1) nie jest operatorem różniczkowym, lecz zwykłą zmienną zespoloną. Wtedy całka ta, o ile pozostanie zbieżna, będzie przedstawiała funkcję analityczną zmiennej s . W ten sposób każdej funkcji f , dla której

§ 10. Transformacja Laplace'a jako podstawa rachunku operatorów

Zastosujmy transformację Laplace'a do rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego

$$(10.1) \quad x'(t) - x(t) = e^t$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 1$.

Mamy oczywiście równość

$$(10.2) \quad \int_0^{\infty} e^{-ts} [x'(t) - x(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{-ts} e^t dt;$$

symbol s traktujemy tu jako zmienną zespoloną.

Całkując przez części, znajdujemy

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} x'(t) dt = [e^{-ts} x(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-ts} x(t) dt;$$

jeżeli założymy, że funkcja $x(t)$ nie wzrasta zbyt szybko, to będziemy mieli $[e^{-ts} x(t)]_0^{\infty} = -x(0) = -1$ i będzie można napisać

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} x'(t) dt = -1 + sX(s),$$

gdzie

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts} x(t) dt.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} e^t dt = \frac{1}{s-1},$$

możemy równanie (10.2) napisać w postaci

$$(10.3) \quad sX(s) - X(s) = 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Stąd z łatwością możemy wyliczyć

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)^2}.$$

Zagadnienie sprowadza się teraz do znalezienia funkcji $x(z)$, która by spełniała równanie całkowe

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} x(t) dt = \frac{s}{(s-1)^2}.$$

Można to zrobić przez zastosowanie tak zwanej *transformacji odwrotnej*

$$(10.4) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} \frac{s}{(s-1)^2} ds,$$

gdzie całkowanie odbywa się wzdłuż prostej równoległej do osi urojonej i położonej od niej na prawo. Stosując metodę rezyduów można stąd wyliczyć, że

$$x(t) = (1+t)e^t.$$

Z przykładu tego widać, że abstrahując od wykonywania samych transformacji, rachunek pod względem formalnym przypomina metodę rozwiązywania równań różniczkowych, podaną w części pierwszej tej książki.

Stosując transformację Laplace'a, można również rozwiązywać równania cząstkowe. Rachunki formalne będą podobne, jak przy stosowaniu metod, podanych w drugiej i trzeciej części tej książki, z tym że dochodzi wykonanie transformacji Laplace'a na początku rachunków oraz wykonanie transformacji odwrotnej dla znalezienia ostatecznej postaci rozwiązania.

Metoda ta lub jej pokrewne są podawane w większości współczesnych podręczników operatorów.

§ 11. Porównanie metody bezpośredniej i metody transformacji Laplace'a

Formalne podobieństwo metody transformacji Laplace'a i metody bezpośredniej, wyłożonej w tej książce, można matematycznie bliżej sprecyzować przez ustalenie pewnego *izomorfizmu*. Nie będziemy tu podawali definicji tego dość abstrakcyjnego pojęcia, pokażemy tylko na przykładzie, o co chodzi. Otóż po wykonaniu transformacji Laplace'a na funkcji e^t znaleźliśmy funkcję $\frac{1}{s-1}$. Mówimy, że funkcja $\frac{1}{s-1}$ jest *transformatą* funkcji e^t i zapisujemy to zwykle w postaci

$$(11.1) \quad \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}.$$

Z drugiej strony, w metodzie bezpośredniej mamy wzór

$$(11.2) \quad \{e^t\} = \frac{1}{s-1}.$$

We wzorze (11.1) litera s jest zmienną zespoloną, a we wzorze (11.2) s jest operatorem różniczkowym. Funkcji analitycznej $\frac{1}{s-1}$ z wzoru (11.1) odpowiada operator $\frac{1}{s-1}$ z wzoru (11.2). W rachunkach formalnych symbol $\frac{1}{s-1}$ traktujemy w obu przypadkach tak samo, bez względu na to czy oznacza on funkcję analityczną, czy operator. I na tym, z grubsza mówiąc, polega izomorfizm.

Mimo formalnego podobieństwa metody transformacji Laplace'a i metody bezpośredniej, metody te nie są równoważne. Jeżeli funkcję e^t po prawej stronie równania (10.1) zastąpimy na przykład przez funkcję $(2t-1)e^t$ (zob. str. 37), to stosowanie transformacji Laplace'a stanie się niemożliwe z powodu rozbieżności całki

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} (2t-1) e^t dt.$$

Metoda ta ogranicza więc zakres stosowalności rachunku operatorów do takiej klasy funkcji, dla których całka

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt$$

jest zbieżna.

WZORY I TABLICE

Ale nawet w przypadku, gdy po prawej stronie równania (10.1) pozostawimy funkcję e^t , metoda transformacji Laplace'a nie daje pełnego rozwiązania zagadnienia, gdyż w czasie rachunków trzeba założyć, że szukana funkcja nie wzrasta zbyt szybko, czyli dokładniej mówiąc, jest *transformowalna*. Wskutek tego nie wiemy, czy znalezione rozwiązanie jest jedyne.

Podobnie w przypadku równań różniczkowych cząstkowych metoda transformacji Laplace'a nie daje odpowiedzi, czy znalezione rozwiązania są jedyne.

§ 12. Inne metody pokrewne

Istnieje wiele podręczników rachunku operatorów, w których wykład jest oparty na transformacji

$$(12.1) \quad F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

gdzie p jest zmienną zespoloną. Różni się ona tym od transformacji Laplace'a (9.2), że przed całką dochodzi jeszcze czynnik p . Użycie litery p w miejsce s nie ma oczywiście żadnego znaczenia matematycznego i jest tylko kwestią zwyczaju. Tablice dla transformacji (12.1) można otrzymać z tablic transformacji Laplace'a zastępując literę s przez p i dopisując przed każdym wzorem czynnik p .

W niektórych książkach punktem wyjścia bywa transformacja odwrotna do (12.1)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp;$$

całkowanie w tym wzorze należy wykonywać wzdłuż prostej równoległej do osi urojonej, dobranej odpowiednio do każdej funkcji $F(p)$.

Prócz tego istnieją różne odmiany tych metod. Na przykład niektórzy autorowie wprowadzają obok zbioru funkcji zmiennej rzeczywistej t i zbioru funkcji analitycznych zmiennej zespolonej p jeszcze zbiór operatorów, który jest zdefiniowany przez izomorfizm z rozważanym zbiorem funkcji analitycznych. Wszystkich tych metod nie będziemy już omawiali, odsyłając zainteresowanego czytelnika do literatury podanej na końcu książki.

I. Funkcje specjalne

1. Funkcja gamma Eulera:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt \quad (\lambda > 0) \quad (\text{I, § 54})$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda \Gamma(\lambda), \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \int_0^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{\mu-1} dt \quad (\lambda > 0, \mu > 0)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

2. Funkcja błędu:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad (\text{I, § 55})$$

$$\operatorname{cerf} t = 1 - \operatorname{erf} t$$

3. Funkcje Bessela:

$$J_0(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu} (\nu!)^2}, \quad J_1(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu} \nu! (1+\nu)!} \quad (\text{II, § 51})$$

$$J_0'(t) = -J_1(t)$$

$$J_0(i\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu} (\nu!)^2}, \quad J_1(i\lambda) = i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu} \nu! (1+\nu)!}$$

$$J_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II, § 53})$$

$$J_n(i\lambda) = i^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$